

Séries de Fourier [1]

EL BAKKALI EL KADI Taha

College of Computing
UM6P



Produit de convolution et approximation de l'unité

- 1 On note $\mathcal{CMBI}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, l'espace vectoriel des applications bornées définies et continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et dont l'intégrale sur $\mathbb{R}$ est absolument convergente.
- 2 Soit T un réel strictement positif. On note $\mathcal{CMT}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, les éléments de $\mathcal{CM}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ T -périodiques.

Dans cette partie, sur le produit de convolution et les approximations de l'unité, nous allons travailler conjointement dans les deux espaces $\mathcal{CMBI}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ et $\mathcal{CMT}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, les techniques d'analyse et de calcul étant similaires.

Proposition et Définition 1

On considère deux applications f et g éléments de $\mathcal{CMBI}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$. Alors pour tout réel x , l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt$$

est absolument convergente. On peut alors définir l'application notée $f * g$ par

$$\begin{aligned}(f * g) : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt.\end{aligned}$$

On a, de plus, $f * g = g * f$.

L'application $f * g$ est appelée produit de convolution de f par g .

Proposition et Définition 2

Soient T un réel strictement positif et f et g éléments de $\mathcal{CMT}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$. On définit l'application $f * g$ par

$$(f * g) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$x \longmapsto \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)g(x - t)dt$$

Alors,

- ❶ $f * g$ est une application T -périodique.
- ❷ $f * g = g * f$.

L'application $f * g$ est appelée produit de convolution de f par g .

Définition 3

On appelle approximation de l'unité, une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{CMBI}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ vérifiant,

1

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(t)| dt \leq M$$

2

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt = 1$$

3

$$\forall \alpha > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{|t| > \alpha} |f_n(t)| dt = 0.$$

Approximation de l'unité T périodique

Définition 4

Soit T un réel strictement positif. On appelle approximation de l'unité T -périodique, une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{CMT}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ vérifiant,

1

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |f_n(t)| dt \leq M$$

2

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f_n(t) dt = 1$$

3

$$\forall \alpha \in]0, \frac{T}{2}[, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{-\alpha} |f_n(t)| dt + \int_{\alpha}^{+\frac{T}{2}} |f_n(t)| dt \right) = 0.$$

Proposition 5

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une approximation de l'unité (respectivement approximation de l'unité T-périodique) et f un élément de $\mathcal{CMBI}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{CM}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$).

- ① Si x est un point de continuité de f , alors la suite $((f_n * f)(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n * f)(x) = f(x)$$

- ② Si f est uniformément continue sur un intervalle I , la suite $(f_n * f)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I .

$\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ **et** $\mathcal{D}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

Définition 6

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On dit qu'une application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ est sesquilinéaire si, pour tous x, y, z dans E et tout α dans $\mathbb{K}$, on a

$$\begin{cases} \varphi(x + y, z) = \varphi(x, z) + \varphi(y, z) \\ \varphi(x, y + z) = \varphi(x, y) + \varphi(x, z) \\ \varphi(\alpha x, y) = \bar{\alpha} \varphi(x, y) \\ \varphi(x, \alpha y) = \alpha \varphi(x, y). \end{cases}$$

Définition 7

Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. On appelle produit scalaire sur E , toute application **sesquilinéaire**

$$\langle ., . \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$$

étant,

- ❶ à symétrie hermitienne i.e. $\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$.
- ❷ positive i.e. $\forall x \in E, \quad \langle x, x \rangle \geq 0$.
- ❸ définie i.e. $\forall x \in E, \quad \langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$.

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé espace préhilbertien.

Proposition 8

Soit E un espace préhilbertien. L'application définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$x \longrightarrow \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

est une norme appelée norme euclidienne. On note $\sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\|$.

Exercice 9: Pour tous $f, g \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on pose

$$(f|g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) dt$$

- ❶ Montrer que $(\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), (\cdot|\cdot))$ est un espace préhilbertien.
- ❷ Montrer que $(\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), (\cdot|\cdot))$ n'est pas un espace préhilbertien.

Définition 10

On appelle **semi-norme de la convergence en moyenne quadratique** d'une fonction f de $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, le nombre réel positif :

$$\|f\|_2 = \sqrt{(f | f)}.$$

Proposition 11

Une fonction $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ vérifie $\|f\|_2 = 0$ si, et seulement si, elle est nulle sauf peut-être en un nombre fini de points sur tout segment.

Définition 12

On dit que $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ vérifie la condition de Dirichlet en $t \in \mathbb{R}$ si on a :

$$f(t) = \frac{1}{2} (f(t^+) + f(t^-)) .$$

L'ensemble des fonctions 2π -périodiques continues par morceaux vérifiant la condition de Dirichlet en tout point est une sev de $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On la notera $\mathcal{D}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Proposition 13

$(\mathcal{D}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), (|\cdot|))$ est un espace préhilbertien.

Résumé : $\|\cdot\|_2$ est une semi norme sur $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et norme sur $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\mathcal{D}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Série et coefficients de Fourier

- ❶ Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on note e_k l'élément de $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e_k(x) = e^{ikx}$$

- ❷ On note $\mathcal{P} = \text{Vect}((e_k)_{k \in \mathbb{Z}})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ des polynômes trigonométriques.
- ❸ Pour tout $n \geq 0$, on note $\mathcal{P}_n = \text{Vect}((e_k)_{-n \leq k \leq n})$.
- ❹ Pour tout élément $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on appelle le n -ème coefficient de Fourier de f :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f) = \langle e_n, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

- ❺ On appelle la somme partielle d'ordre n de la série de Fourier de f :

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e_k$$

La série de Fourier de f est $c_0(f) + \sum_{\geq 1} c_n(f)e^{int} + c_{-n}(f)e^{-int}$

On appelle les *coefficients de Fourier trigonométriques d'ordre n* les fonctions $a_n(f)$ et $b_n(f)$ définies pour tout $n \geq 0$ par :

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt, \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt.$$

Proposition 14

Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} c_n(f) = \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2}, & c_{-n}(f) = \frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2} = \overline{c_n(f)}, \\ a_n(f) = c_{-n}(f) + c_n(f), & b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)). \end{cases}$$

La série $\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx))$ est la série de Fourier trigonométrique de la fonction f .

Proposition 14

- ① La famille $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est orthonormée dans $(\mathcal{D}_2(\mathbb{R}, \mathbb{K}), \|\cdot\|_2)$.
- ②
 - ① Pour tout entier naturel n , on a $\mathcal{D} = \mathcal{P}_n \oplus \mathcal{P}_n^\perp$.
 - ② La projection orthogonale p_n sur $\mathcal{P}_n$ vérifie:

$$\forall f \in \mathcal{D}, \quad p_n(f) = S_n(f)$$

- ③ $\forall f \in \mathcal{D}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f - S_n(f)\|_2 = \inf_{g \in \mathcal{P}_n} \|f - g\|_2.$

Proposition 15 (Inégalité de Bessel)

Pour tout élément f de $\mathcal{D}$, les séries $\sum_{n \geq 1} |c_n(f)|^2$ et $\sum_{n \geq 1} |c_{-n}(f)|^2$ sont convergentes avec

$$|c_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

Si $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, l'inégalité de Bessel reste vraie.

Exercice 16: Montrer (sans utiliser un résultat de densité) que si $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{int} = 0$.

Convergence en moyenne quadratique

Convergence en moyenne quadratique

Porposition 17 (Théorème de Weirstrass trigonométrique)

Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, il existe une suite de polynomes trigonométriques qui converge uniformément vers f .

Porposition 18

Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Il existe $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tq $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - f_n\|_2 = 0$.

Théorème 19

Pour tout $f \in \mathcal{D}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - S_n(f)\|_2 = 0$

On remarque que pour tout $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ le résultat du théorème 19 est vrai.